Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Prin calcul direct se obține unica soluție $\begin{cases} x = pqr \\ y = -(pq+qr+rp) \\ z = p+q+r \end{cases}$.

c) Numerele p, q, r verifică aceeași ecuație de grad trei $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, deci $p = q = 1$ sau $p = r = 1$ sau $q = r = 1$.

2. a) A are 25 de elemente.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \hat{1}$ și $ab = \hat{0}$.

Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow b^2 = \hat{4} \Rightarrow b \in \{\hat{2}, \hat{3}\}$. Dacă $b = \hat{0} \Rightarrow a^2 = \hat{1} \Rightarrow a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$.

Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$

c) Matricea $Y = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \neq O_2$ are determinantul $\hat{0}$, deci nu e inversabilă.